

第3讲 平行线的判定

一、平行线定义及平行公理

平行线定义及平行公理

平行线定义：在_____内，永不_____的两条直线叫平行线。
用_____表示。

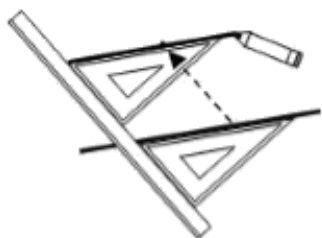
两条直线的位置关系：在_____内，不_____的两条直线只有两种位置关系，_____和_____。

平行公理：经过直线外一点，有且只有_____直线与这条直线平行。

平行公理推论：如果两条直线都和第三条直线_____，那么这两条直线也互相_____。简单说成：_____。

两平行线间距离：同时_____于两条平行线，并且夹在这两条平行线间的_____。平行线间的距离处处_____。

平行线的画法：

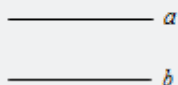


- 一 “落”：把三角板的一边落在已知直线上，
- 二 “靠”：把直尺紧靠三角板的另一边，
- 三 “移”：沿直尺移动三角板，直至落在已知直线上的三角板的一边经过已知点，
- 四 “画”：沿三角板过已知点的边画直线。

【教法备注】

1、**平行线定义**：在同一平面内，永不相交的两条直线叫平行线。用“//”表示。

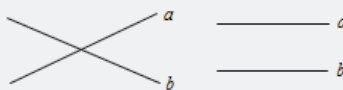
直线 a 与直线 b 互相平行，记作 $a//b$



注意：两条线段平行、两条射线平行，实际是指线段、射线所在的直线平行。

2、两直线的位置关系：

(1) 相交和平行：在**同一平面内**，不重合的两条直线只有两种位置关系，**相交和平行**。



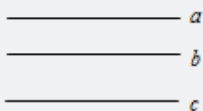
(2) 在同一平面内两直线不相交时，它们一定平行；反之，在同一平面内两直线平行时，它们一定不相交。（这里，我们把重合的直线视为一条直线）

3、平行公理及推论：

(1) 平行公理：经过**直线外**一点，**有且只有**一条直线与这条直线平行。

(2) 平行公理的推论：如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行。简单说成：平行于同一直线的两条直线互相平行。

即 $a//b, b//c$ ，那么 $a//c$ （这也称为平行线的传递性）。



注意：

① 平行公理特别强调“经过直线外一点”，而非直线上一点，要区别于垂线的性质。

② “有”表示存在，“只有”表示唯一，说明了平行线的存在性和唯一性。

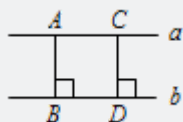
拓展：

几条直线都与同一直线平行，这几条直线也互相平行。

4、两平行线间距离：

(1) 两条平行线间的距离：同时垂直于两条平行线，并且夹在这两条平行线间的线段的长度叫做这两条平行线间的距离。

(2) 平行线间的距离处处相等。

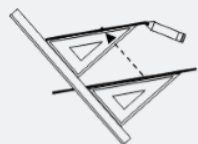


书写：线段 AB 、 CD 的长度是平行线 a 、 b 间的距离。

$\because a//b, AB \perp b, CD \perp b,$

$\therefore AB = CD.$

5、平行线的画法：



一 “落”：把三角板的一边落在已知直线上，

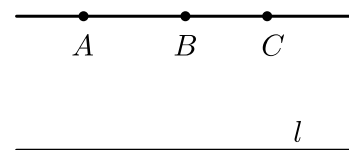
二 “靠”：把直尺紧靠三角板的另一边，

三 “移”：沿直尺移动三角板，直至落在已知直线上的三角板的一边经过已知点，

四 “画”：沿三角板过已知点的边画直线。

|| 例题

1. 如图所示，因为 $AB//l, BC//l$ ，所以 $A、B、C$ 共线，其理由是（ ）。



- A. 两点确定一条直线
B. 在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直
C. 过一点能做一条平行线
D. 过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行

【答案】D

【解析】过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行。
故选D。

【标注】【知识点】平行公理及其推论

2. 下面各语句中，正确的是（ ）。

- ①不同的两条直线叫做平行线；
②在同一平面内，两条直线的位置关系有相交和平行两种；
③如果线段 AB 和线段 CD 不相交，那么直线 AB 和直线 CD 平行；
④如果直线 $a//b$ ， $b//c$ ，那么 $a//c$ 。

- A. 只有① B. 只有② C. ②和③ D. ②和④

【答案】D

【解析】平行线定理一的条件是“在同一平面内”， $\therefore$ ①不对；线段不是无限长，即使不相交，他们所在的直线也有可能不平行， $\therefore$ ③不对，只有②④正确。

【标注】【知识点】区分真假命题

3. 在同一平面内，有 a, b, c, d, e 五条互不重合的直线，若 $a \perp b$ ， $b//c$ ， $c \perp d$ ， $d//e$ ，则直线 a 与 e 的位置关系为（ ）。

- A. 平行 B. 垂直 C. 既不平行也不垂直 D. 无法确定

【答案】A

【解析】 $\because a \perp b$ ， $b//c$ ，

$$\therefore a \perp c,$$

$$\therefore c \perp d,$$

$$\therefore a \parallel d,$$

$$\therefore d \parallel e,$$

$$\therefore a \parallel e.$$

【标注】【知识点】直线的位置关系

【重点强调】

2019~2020学年天津河西区天津四中初一下学期单元测试《相交线与平行线》第6题3分

练习

4. 若直线 $a \parallel b$, $b \parallel c$, 则 $a \parallel c$ 的依据是().

A. 平行的性质

B. 等量代换

C. 平行于同一直线的两直线平行

D. 都不对

【答案】C

【解析】本题考查“平行的传递性”，但绝对不能说成“等量代换”， $\therefore$ 这里根本没有相等的量。

【标注】【知识点】直线的位置关系

5. 下列命题中，真命题的个数有().

(1)同一平面内，两条直线有两种位置关系；

(2)有一条公共边的角叫邻补角；

(3)内错角相等；

(4)对顶角相等；

(5)垂线段最短；

(6)从直线外一点到这条直线的垂线段，叫做点到直线的距离；

(7)在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线平行。

A. 1个

B. 3个

C. 4个

D. 5个

【答案】B

【解析】①同一平面内两直线的位置关系有相交、平行，原命题是真命题；

②两个角有一条公共边，它们的另一条边互为反向延长线，具有这种关系的两个角互为邻补角，所以有一条公共边的角叫邻补角错误，原命题是假命题；

③只有两条直线平行，内错角相等，所以只说内错角相等错误，原命题是假命题；

④对顶角相等，原命题是真命题；

⑤直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短，原命题是真命题；

⑥从直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做点到直线的距离，原命题是假命题；

⑦在同一平面内，过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行，原命题是假命题；

所以①④⑤为真命题；

故选A .

【标注】【知识点】区分真假命题

6. 在同一平面内有 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{97}$ ，共97条直线，如果 $a_1 // a_2, a_2 \perp a_3, a_3 // a_4, a_4 \perp a_5, a_5 // a_6, a_6 \perp a_7 \dots$ ，那么 a_1 与 a_{97} 的位置关系是 _____ .

【答案】平行

【解析】方法一： $a_1 // a_2, a_2 \perp a_3, a_3 // a_4, a_4 \perp a_5, a_5 // a_6, a_6 \perp a_7, \dots$ ，

所以 $a_1, a_2, a_5, a_6, \dots, a_{4n+1}, a_{4n+2}$ 相互平行，

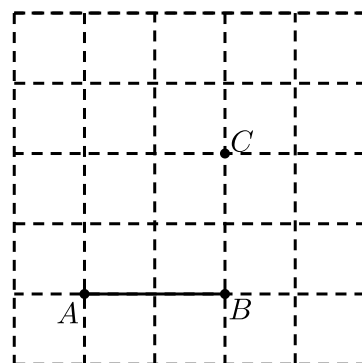
则 a_1 与 a_{97} 的位置关系是平行 .

方法二：寻找规律， $a_1 // a_2, a_1 \perp a_3, a_1 \perp a_4; a_1 // a_5, a_1 // a_6, a_1 \perp a_7, a_1 \perp a_8 \dots$ ，
4个一循环， $97 \div 4 = 24 \dots 1$ ，所以 $a_{97} // a_1$.

【标注】【知识点】平行线判定

|| 例题

7. 如图，已知线段 AB 及点 C ，在方格纸上画图并回答问题 .



(1) 画直线 AC .

(2) 过点 B 画直线 AC 的平行线 l .

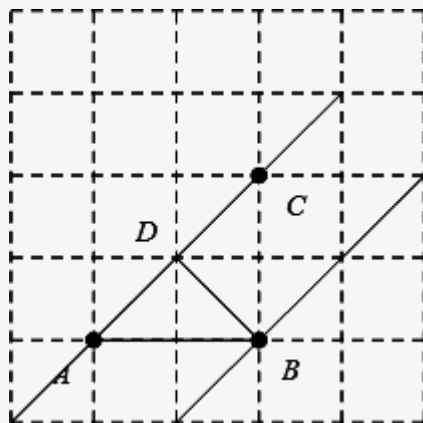
(3) 过点 B 画直线 AC 的垂线, 垂足是 D ; 点 B 到直线 AC 的距离是线段 _____ 的长度 .

【答案】 (1) 作图见解析 .

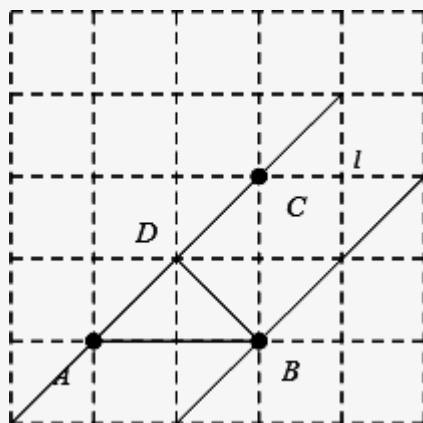
(2) 作图见解析 .

(3) BD

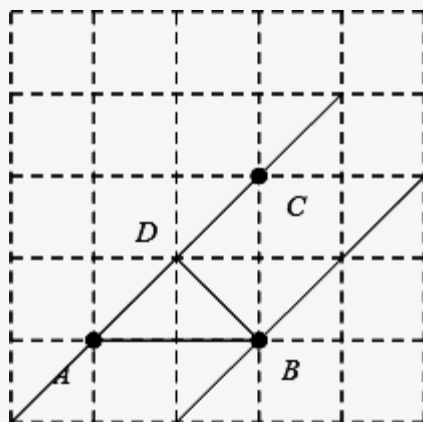
【解析】 (1) 直线 AC 如图所示 .



(2) 过点 B 画直线 AC 的平行线 l , 如图所示 .



(3) $BD \perp AC$, 垂足为 D , 如图所示, 点 B 到直线 AC 的距离是线段 BD 的长度 .



【标注】 【知识点】 过一点作已知直线的平行线

8. 已知：在同一平面内，直线 $a \parallel c$ ，且直线 a 到直线 c 的距离是3；直线 $b \parallel c$ ，直线 b 到直线 c 的距离为5，则直线 a 到直线 b 的距离为 _____ 。

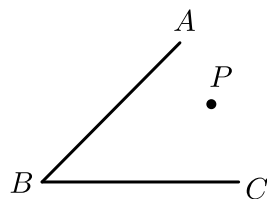
【答案】 8或2

【解析】 当直线 c 在直线 a 、直线 b 之间时，距离为 $3 + 5 = 8$ ；
当直线 c 不在直线 a 、直线 b 之间时，距离为 $5 - 3 = 2$ ；
故答案为：8或2。

【标注】【知识点】等积变换与“平行线”有关

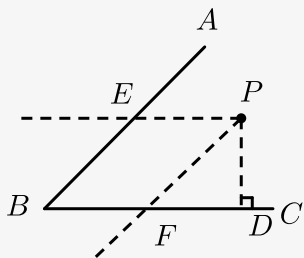
练习

9. 过点 P 画直线 $PD \perp BC$ 交 BC 于 D 。
- (1) 过点 P 画直线 $PD \perp BC$ 交 BC 于 D ；
 - (2) 过点 P 画 BC 的平行线交 AB 于 E ；
 - (3) 过点 P 画 AB 的平行线交 BC 于 F 。
 - (4) 点 P 到线段 BC 的距离，是线段 _____ 的长。



【答案】 PD

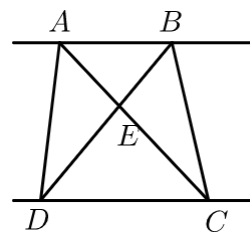
【解析】



【标注】【知识点】过一点作已知直线的平行线

【知识点】作线段的垂直平分线

10. 如图， $AB \parallel CD$ ，则 $S_{\triangle ADE}$ _____ $S_{\triangle BCE}$ 。（填“>”，“<”，“=”）



【答案】 =

【解析】 $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BCD} \text{ (同底等高) },$$

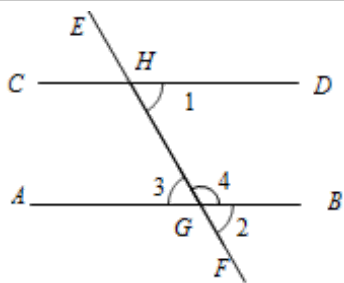
$$\text{又} \because S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ADC} - S_{\triangle CDE},$$

$$S_{\triangle BCE} = S_{\triangle BDC} - S_{\triangle CDE},$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = S_{\triangle BCE}.$$

【标注】【知识点】等积变换与“平行线”有关

二、 平行线的判定



【书写】

两条直线被第三条直线所截，如果
_____，那么这两条直线平行．

简单说成：

_____．

两条直线被第三条直线所截，如果
_____，那么这两条直线平行．

简单说成：

_____．

两条直线被第三条直线所截，如果
_____，那么这两条直线平行．

简单说成：

_____．

如果两条直线都与_____，那么这
两条直线也互相平行．

简单说成：

_____．

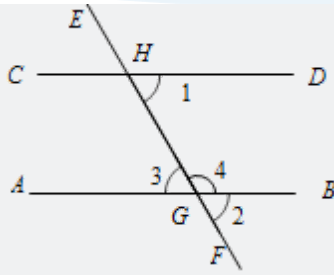
在_____内，_____于同一直线的两条直线
互相平行．（不可直接用，需证明）

【教法备注】

1、平行线判定一：

两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行．

简单说成：同位角相等，两直线平行．



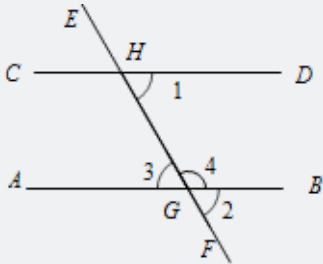
$$\because \angle 1 = \angle 2,$$

$\therefore AB \parallel CD$ (同位角相等, 两直线平行) .

2、平行线判定二：

两条直线被第三条直线所截, 如果内错角相等, 那么这两条直线平行 .

简单说成: 内错角相等, 两直线平行 .



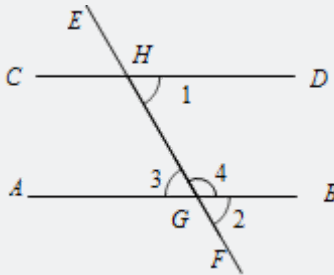
$$\because \angle 1 = \angle 3,$$

$\therefore AB \parallel CD$ (内错角相等, 两直线平行) .

3、平行线判定三：

两条直线被第三条直线所截, 如果同旁内角互补, 那么这两条直线平行 .

简单说成: 同旁内角互补, 两直线平行 .



$$\because \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ,$$

$\therefore AB \parallel CD$ (同旁内角互补, 两直线平行) .

4、平行公理推论：

如果两条直线都与第三条直线平行, 那么这两条直线也互相平行 .

简单说成: 平行于同一直线的两条直线互相平行。

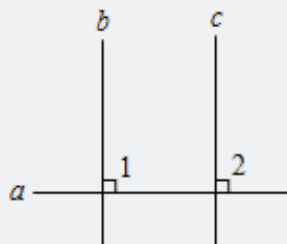


$$\because a \parallel b, b \parallel c,$$

$\therefore a \parallel c$ (平行于同一直线的两条直线互相平行) .

5、利用垂直证明平行：

在同一平面内，垂直于同一直线的两条直线平行。（不可直接用，需证明）



直线 a, b, c 在同一平面，

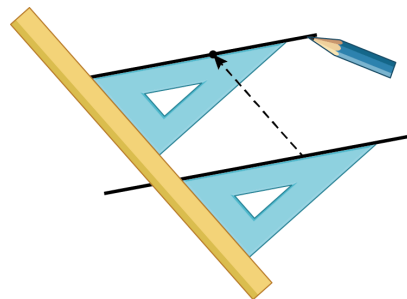
$\because a \perp b, a \perp c,$

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 90^\circ,$

$\therefore b \parallel c$ （同位角相等，两直线平行）。

例题

11. 如图，给出了作两条平行线的方法，其依据是（ ）。



- A. 同位角相等，两直线平行
- C. 同旁内角互补，两直线平行

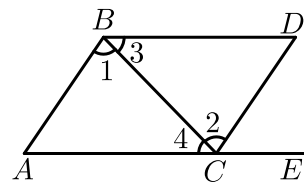
- B. 内错角相等，两直线平行
- D. 两直线平行，同位角相等

【答案】A

【解析】同位角相等，两直线平行。

【标注】【知识点】平行线判定

12. 如图所示，点 E 在 AC 的延长线上，下列条件中能判断 $AB \parallel CD$ 的是（ ）。



- A. $\angle 3 = \angle A$

- B. $\angle 1 = \angle 2$

C. $\angle D = \angle DCE$

D. $\angle D + \angle ACD = 180^\circ$

【答案】 B

【解析】 A 选项： $\angle 3 = \angle A$ ，无法得到， $AB \parallel CD$ ，故此选项错误．

B 选项： $\angle 1 = \angle 2$ ，根据内错角相等，两直线平行可得： $AB \parallel CD$ ，故此选项正确．

C 选项： $\angle D = \angle DCE$ ，根据内错角相等，两直线平行可得： $BD \parallel AC$ ，故此选项错误．

D 选项： $\angle D + \angle ACD = 180^\circ$ ，根据同旁内角互补，两直线平行可得： $BD \parallel AC$ ，故此选项错误．

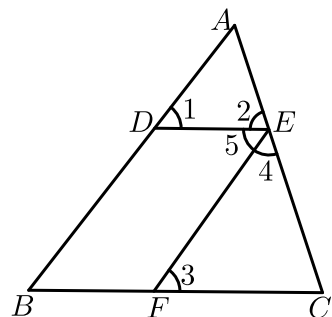
故选 B．

【标注】 【知识点】 平行线判定

【重点强调】

2016~2017 学年天津红桥区初一下学期期中第二学区第 8 题 3 分

13. 如图：



(1) 若 $\angle 1 = \angle B$ ，则可得出 _____ $\parallel$ _____，根据是 _____．

(2) 若 $\angle 1 = \angle 5$ ，则可得出 _____ $\parallel$ _____，根据是 _____．

(3) 若 $\angle DEC + \angle C = 180^\circ$ ，则可得出 _____ $\parallel$ _____，根据是 _____．

(4) 若 $\angle B = \angle 3$ ，则可得出 _____ $\parallel$ _____．

(5) 若 $\angle 2 = \angle C$ ，则可得出 _____ $\parallel$ _____．

【答案】 (1) DE ; BC ; 同位角相等，两直线平行

(2) EF ; AB ; 内错角相等，两直线平行

(3) DE ; BC ; 同旁内角互补，两直线平行

(4) AB ; EF

(5) DE ; BC

【解析】(1) $\because \angle B = \angle 1$,

$\therefore DE \parallel BC$ (同位角相等, 两直线平行) .

故答案为: DE, BC , 同位角相等, 两直线平行 .

(2) $\because \angle 1 = \angle 5$,

$\therefore EF \parallel AB$ (内错角相等, 两直线平行) .

故答案为: EF, AB , 内错角相等, 两直线平行 .

(3) $\because \angle DEC + \angle C = 180^\circ$,

$\therefore DE \parallel BC$ (同旁内角互补, 两直线平行) .

故答案为: DE, BC , 同旁内角互补, 两直线平行 .

(4) $\because \angle B = \angle 3$,

$\therefore AB \parallel EF$ (同位角相等, 两直线平行) .

故答案为: AB, EF .

(5) $\because \angle 2 = \angle C$,

$\therefore DE \parallel BC$.

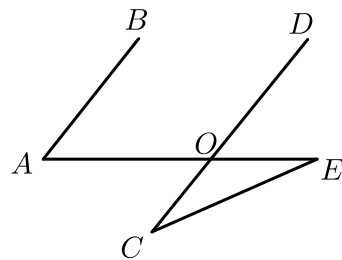
故答案为: DE, BC .

【标注】【知识点】平行线判定

【重点强调】

2019~2020学年天津河北区天士力中学初一下学期单元测试《相交线和平行线》第19题

14. 如图, AE 与 CD 交于点 O , $\angle A = 50^\circ$, $OC = OE$, $\angle C = 25^\circ$, 求证: $AB \parallel CD$.



【答案】证明见解析 .

【解析】 $\because OC = OE$,

$\therefore \angle E = \angle C = 25^\circ$,

$\therefore \angle DOE = \angle C + \angle E = 50^\circ$,

$\because \angle A = 50^\circ$,

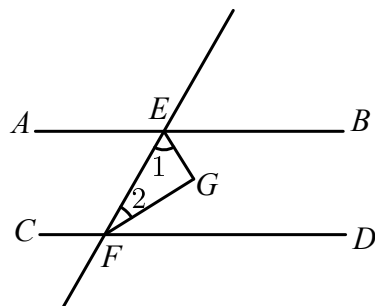
$\therefore \angle A = \angle DOE$,

$$\therefore AB \parallel CD.$$

【标注】【知识点】平行线判定

15. 已知：如图， AB 、 CD 被 EF 所截， EG 平分 $\angle BEF$ ， FG 平分 $\angle EFD$ ，且 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ 。

证明： $AB \parallel CD$ 。



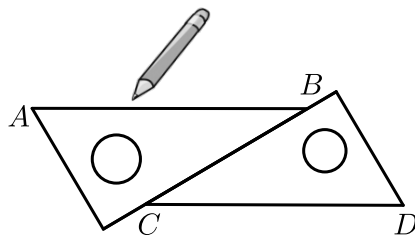
【答案】证明见解析。

【解析】 $\because EG$ 平分 $\angle BEF$ ，
 $\therefore \angle 1 = \frac{1}{2} \angle BEF$ ，
 $\because FG$ 平分 $\angle EFD$ ，
 $\therefore \angle 2 = \frac{1}{2} \angle DFE$ ，
 $\therefore \angle BEF + \angle EFD = 2(\angle 1 + \angle 2) = 180^\circ$ ，
 $\therefore AB \parallel CD$ 。

【标注】【知识点】平行线判定

练习

16. 如图，小明利用两块相同的三角板，分别在三角板的边缘画直线 AB 和 CD ，并由此判定 $AB \parallel CD$ ，这是根据 _____，两直线平行。



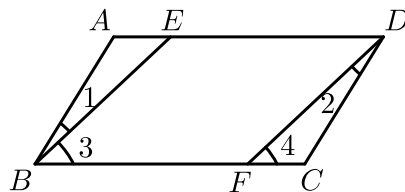
【答案】内错角相等

【解析】 $\because \angle ABC = \angle BCD$ ，

$\therefore AB \parallel CD$ (内错角相等, 两直线平行) .

【标注】【知识点】平行线判定

17. 如图, 下列结论: ①当 $\angle 1 = \angle 2$ 时, $AB \parallel CD$; ②当 $\angle 1 = \angle 2$ 时, $BE \parallel DF$; ③当 $\angle 3 = \angle 4$ 时, $BE \parallel DF$; ④当 $\angle 3 = \angle 4$ 时, $AD \parallel BC$. 其中正确的有 () .



A. 1个

B. 2个

C. 3个

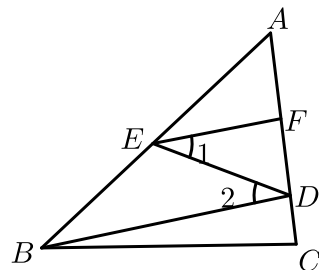
D. 4个

【答案】A

【解析】平行线的判定 .

【标注】【知识点】平行线判定

18. 如图: 已知 $\angle AED = 60^\circ$, $\angle 2 = 30^\circ$, EF 平分 $\angle AED$, 可以判断 $EF \parallel BD$ 吗? 请说明理由 .



【答案】 $EF \parallel BD$, 证明见解析 .

【解析】 $EF \parallel BD$, 理由如下:

$\because \angle AED = 60^\circ$, EF 平分 $\angle AED$,

$\therefore \angle FED = 30^\circ$,

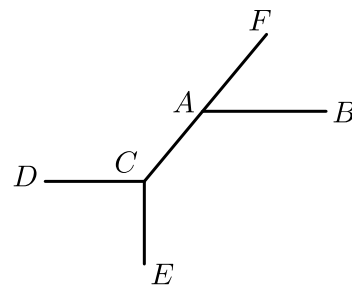
又 $\because \angle FEB = \angle 2 = 30^\circ$,

$\therefore EF \parallel BD$ (内错角相等, 两直线平行) .

【标注】【知识点】平行线判定

【重点强调】

19. 如图, $\angle BAF = 50^\circ$, $\angle ACE = 140^\circ$, $CD \perp CE$, 求证: $DC \parallel AB$.

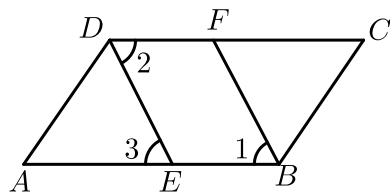


【答案】证明见解析.

【解析】 $\because CD \perp CE$,
 $\therefore \angle DCE = 90^\circ$,
 $\because \angle ACE = 140^\circ$,
 $\angle ACE + \angle DCE + \angle ACD = 360^\circ$,
 $\therefore \angle ACD = 130^\circ$,
 又 $\because \angle BAF = 50^\circ$, $\angle BAF + \angle BAC = 180^\circ$,
 $\therefore \angle BAC = 130^\circ$, $\angle BAC = \angle ACD$,
 $\therefore DC \parallel AB$. (内错角相等, 两直线平行)

【标注】【知识点】平行线判定

20. 已知, 如图所示, $\angle ABC = \angle ADC$, BF 、 DE 分别平分 $\angle ABC$ 与 $\angle ADC$, 且 $\angle 1 = \angle 3$. 求证:
 $AB \parallel DC$.



【答案】证明见解析.

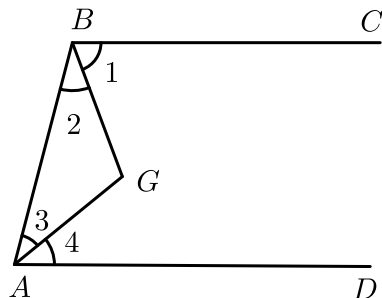
【解析】 $\because \angle ABC = \angle ADC$ (已知),
 $\therefore \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \angle ADC$ (等式的性质).
 又 $\because BF$ 、 DE 分别平分 $\angle ABC$ 与 $\angle ADC$,
 $\therefore \angle 1 = \frac{1}{2} \angle ABC$, $\angle 2 = \frac{1}{2} \angle ADC$ (角平分线的定义).
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$.

$\therefore \angle 1 = \angle 3$ (已知),
 $\therefore \angle 2 = \angle 3$ (等量代换).
 $\therefore AB \parallel DC$ (内错角相等, 两直线平行).

【标注】【知识点】平行线与角平分线综合

独步天下

21. 已知: 如图, $\angle 1 = 2\angle 2$, $\angle 3 = 2\angle 4$, $\angle G + \angle 4 = 120^\circ$. 求证: $AD \parallel BC$.



【答案】证明见解析.

【解析】由题意, 设 $\angle 2 = \alpha$, 则 $\angle 1 = 2\alpha$; 设 $\angle 4 = \beta$, 则 $\angle 3 = 2\beta$;

$\therefore \angle 2 + \angle 3 + \angle G = 180^\circ$ (三角形内角和定理)

$\therefore \angle G = 180^\circ - \angle 2 - \angle 3 = 180^\circ - \alpha - 2\beta$ (等式性质)

又 $\because \angle G + \angle 4 = 120^\circ$ (已知)

$\therefore 180^\circ - \alpha - 2\beta + \beta = 120^\circ$, 即 $\alpha + \beta = 60^\circ$ (等量代换)

$\therefore \angle CBA + \angle BAD = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 3(\alpha + \beta) = 3 \times 60^\circ = 180^\circ$ (等量代换)

$\therefore AD \parallel BC$ (同旁内角互补, 两直线平行)

【标注】【知识点】平行线判定

【重点强调】

当遇到角相等或存在倍数关系时, 可以设未知数寻找关系